EXERCICE N°4 :	20'	4 points	

Une urne contient six pièces de monnaie.

- Quatre pièces sont équilibrées
- Les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « FACE » est égale à $\frac{2}{3}$.

On tire au hasard, une pièce de l'urne et on effectue n lanceurs successifs de cette pièce, $n \geq 1$.
On considère les évènements suivants :

E : « la pièce tirée est équilibrée ».

F_n : « on obtient FACE pour les n lancers »

1°) a) Déterminer $p(E)$, $p(F_1 / E)$ et $p(F_1 / \overline{E})$

b) Montrer que $p(F_1) = \frac{5}{9}$

2°) Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$

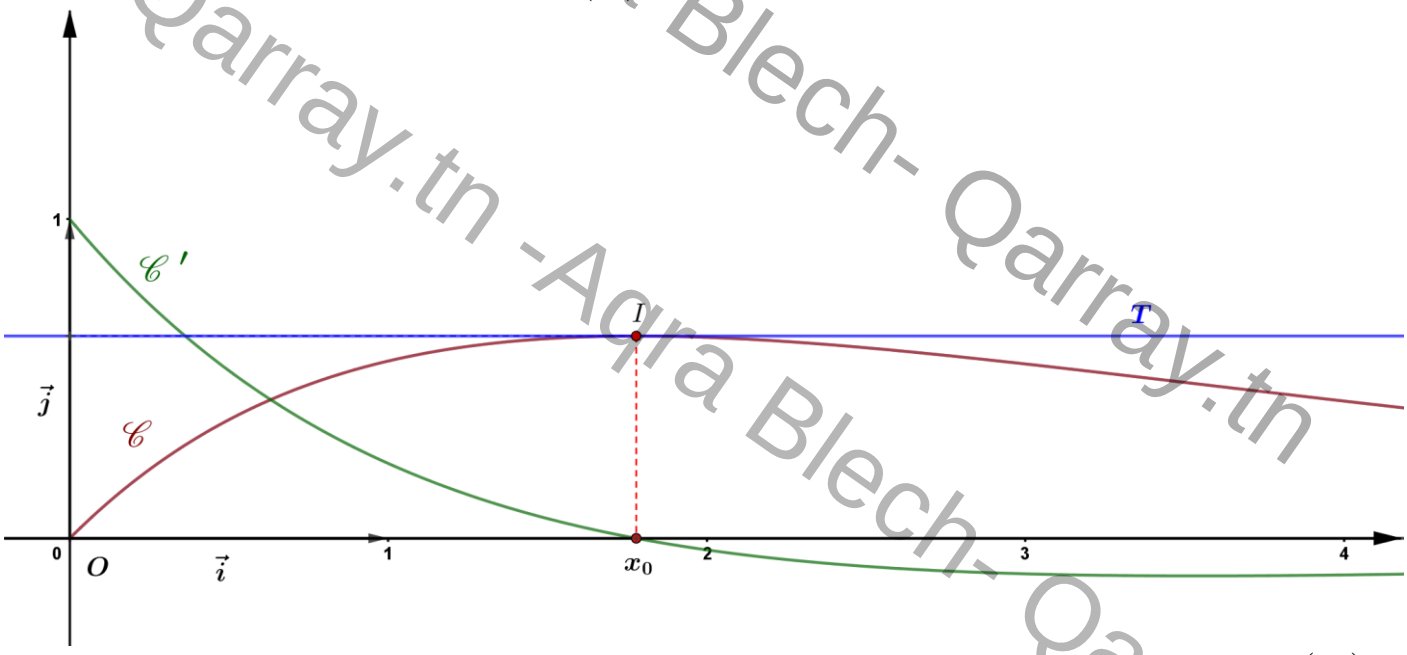
3°) Soit X_n la variable aléatoire définie de la manière suivante : $\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé;} \\ X_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$;

a) Donner la loi de probabilité de X_n.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X_n .

c) Dans la figure ci-dessous

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
- (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$, par $f(x) = \frac{x}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right)$.
- (C') est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.
- La courbe (C') coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un seul point d'abscisse x_0.
- (T) est la droite d'équation $y = f(x_0)$.



Exploiter le graphique pour déterminer l'entier n pour lequel l'espérance mathématique $E(X_n)$ est maximale.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn